سوال ۱

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

زمانی دایره خط را در دو نقطه قطع می‌کند که فاصله مرکز تا خط کمتر از شعاع باشد.

$$x^۲ + y^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow O(۱, ۰) \quad , \quad R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۰ + ۱۲} = ۲$$

$$\text{فاصله مرکز از خط} = \frac{|۳-k|}{\sqrt{۳^۲+۲^۲}} = \frac{|k-۳|}{۵} < ۲$$

$$\Rightarrow |k - ۳| < ۱۰ \Rightarrow -۷ < k < ۱۳ \Rightarrow (a, b) \subset (-۷, ۱۳)$$

$$\Rightarrow \max(b - a) = ۲۰$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

دو دایره را استاندارد می‌کنیم:

$$x^۲ + y^۲ - ۴x - ۴y + ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۲)^۲ - ۴ + (y - ۲)^۲ - ۴ + ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۲)^۲ + (y - ۲)^۲ = ۴ \Rightarrow \begin{cases} O_۱ = (۲, ۲) \\ R_۱ = ۲ \end{cases}$$

$$x^۲ + y^۲ - ۲x = ۰ \Rightarrow (x - ۱)^۲ - ۱ + y^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۱)^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} O_۲ = (۱, ۰) \\ R_۲ = ۱ \end{cases}$$

حال فاصله مرکز دو دایره از هم را محاسبه می‌کنیم:

$$O_۱O_۲ = \sqrt{(۲ - ۱)^۲ + (۲ - ۰)^۲} = \sqrt{۵}$$

با توجه به شعاع دایره‌ها:

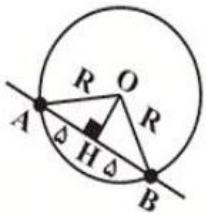
$\Rightarrow |R_۲ - R_۱| < O_۱O_۲ < R_۱ + R_۲$ دو دایره متقاطع‌اند.

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

شکل فرضی زیر را درنظر بگیرید:



$AB = ۱۰$

در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع، میانه، نیمساز بر هم منطبق‌اند.

ابتدا فاصلهٔ مرکز از خط $۵x + ۱۲y = ۰$ (OH) را به‌دست می‌آوریم:

$$O(-\frac{-۴}{۲}, -\frac{۶}{۲}) = (۲, -۳)$$

$$OH = \frac{|۱۰-۳۶|}{\sqrt{۲۵+۱۴۴}} = \frac{۲۶}{۱۳} = ۲$$

$$R^۲ = ۲۵ + ۴ \Rightarrow R = \sqrt{۲۹}$$

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶ + ۳۶ - ۴c} = \sqrt{۲۹}$$

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{۵۲ - ۴c} = \sqrt{۲۹} \Rightarrow \frac{۱}{۴} \times ۴(۱۳ - c) = ۲۹$$

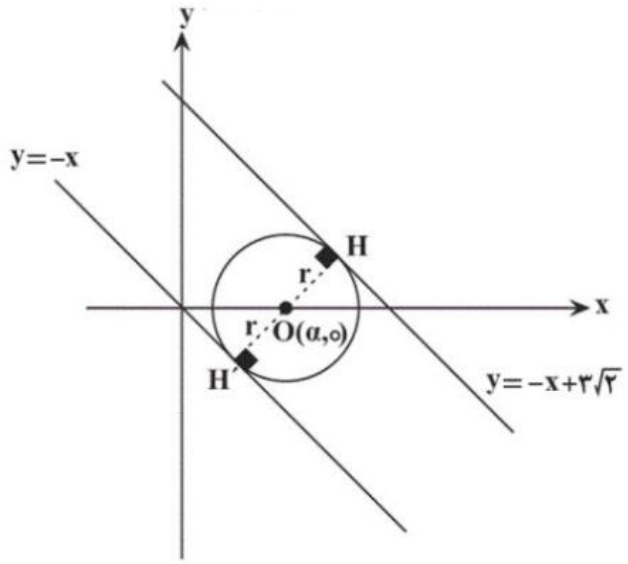
$$۱۳ - c = ۲۹ \Rightarrow c = -۱۶$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{cases} y = ۳\sqrt{۲} - x \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - ۳\sqrt{۲} = ۰ \\ x + y = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{فاصله دو خط} = ۲r = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \Rightarrow ۲r = \frac{۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۳ \Rightarrow r = \frac{۳}{۲}$$



مرکز دایره $O(\alpha, ۰)$ می‌باشد. پس:

$$|OH'| = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{|۱\times\alpha+۱\times۰+۰|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

معادله دایره‌ای با شعاع $\frac{۳}{۲}$ و مرکز $(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}, ۰)$ به‌صورت زیر است:

$$(x - \frac{۳\sqrt{۲}}{۲})^۲ + (y - ۰)^۲ = \frac{۹}{۴} \Rightarrow (x - \frac{۳\sqrt{۲}}{۲})^۲ + y^۲ = \frac{۹}{۴}$$

سوال ۵

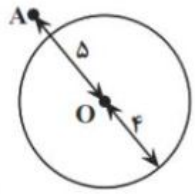
پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

نقطه $(۲,۳)$ مرکز دایره است.

فاصله نقطه از مرکز برابر است با $d = \sqrt{(۲-(-۱))^۲ + (۳-۷)^۲} = ۵$ از طرفی شعاع دایره برابر است با: $R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۳۶+۱۲} = ۴$

بنابراین با توجه به شکل، بیش‌ترین فاصله ممکن ۹ است.



سوال ۶

پاسخ: گزینه ۲

شعاع دایره داده شده $r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲ + (-۴)^۲ - ۴a} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰ - ۴a} = \sqrt{۵ - a}$

و مرکز دایره $(-۱,۲)$ می‌باشد و چون خط $۴x - ۳y = ۵$ بر دایره مماس است، فاصله مرکز دایره تا خط $۴x - ۳y = ۵$ مساوی شعاع دایره است.
پس فاصله نقطه $(-۱,۲)$ را از خط $۴x - ۳y - ۵ = ۰$ به‌دست می‌آوریم:

$$R = \frac{|-۴-۶-۵|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

از طرفی $r = \sqrt{۵ - a}$ پس: $\sqrt{۵ - a} = ۳ \Rightarrow ۵ - a = ۹ \Rightarrow a = -۴$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

برای رسم دو مماس باید نقطه خارج از دایره قرار بگیرد. یعنی $f(A) > ۰$ باشد.

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۰ \xrightarrow{f(\alpha, -۱)>۰} \alpha^۲ + (-۱)^۲ - ۲\alpha + ۴(-۱) > ۰$$

$$\alpha^۲ - ۲\alpha - ۳ > ۰ \Rightarrow (\alpha - ۳)(\alpha + ۱) > ۰ \Rightarrow \alpha > ۳ \quad \text{یا} \quad \alpha < -۱$$

$$\Rightarrow \alpha \in R - [-۱, ۳]$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

بنابر فرض سؤال داریم:

$$۲\sqrt{(x-۰)^۲+(y-۲)^۲}=\sqrt{(x-۵)^۲+(y-۰)^۲}$$

$$\Rightarrow ۴x^۲+۴(y-۲)^۲=(x-۵)^۲+y^۲$$

$$\Rightarrow ۴x^۲+۴y^۲-۱۶y+۱۶=x^۲-۱۰x+۲۵+y^۲$$

$$\Rightarrow ۳x^۲+۳y^۲+۱۰x-۱۶y-۹=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲+\frac{۱۰}{۳}x-\frac{۱۶}{۳}y-۳=۰ \Rightarrow R=\frac{۱}{۲}\sqrt{(\frac{۱۰}{۳})^۲+(-\frac{۱۶}{۳})^۲+۴(۳)}$$

$$=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۴۶۴}{۹}}=\frac{۴\sqrt{۲۹}}{۶}=\frac{۲\sqrt{۲۹}}{۳}$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۱

مختصات مرکز این دایره را به صورت $\omega(\alpha,۲\alpha)$ در نظر می‌گیریم، از آنجا که این دایره نیم‌ساز ربع اول را با طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند، از دو نقطه $A(۱,۱)$ و $B(۲,۲)$ می‌گذرد، با توجه به تعریف دایره، باید:

شعاع دایره: $A\omega=B\omega \Rightarrow \sqrt{(\alpha-۱)^۲+(۲\alpha-۱)^۲}$

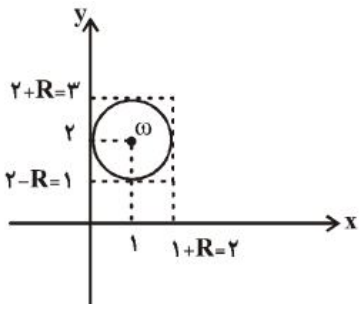
$$=\sqrt{(\alpha-۲)^۲+(۲\alpha-۲)^۲}$$

$$\Rightarrow (\alpha^۲-۲\alpha+۱)+(۴\alpha^۲-۴\alpha+۱)=(\alpha^۲-۴\alpha+۴)+(۴\alpha^۲-۸\alpha+۴)$$

$$\Rightarrow -۲\alpha+۱+۱=۴-۸\alpha+۴ \Rightarrow ۶\alpha=۶ \Rightarrow \alpha=۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega(۱,۲) \\ R=A\omega=\sqrt{(۱-۱)^۲+(۲-۱)^۲}=۱ \end{cases}$$

دایره را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم، ملاحظه می‌شود که خطوط $y=۱$ ، $y=۳$ ، $x=۰$ و $x=۲$ بر این دایره مماس هستند.

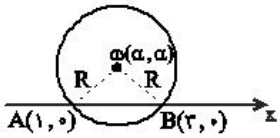


سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

از آنجا که مرکز دایره روی نیمساز ربع اول (یعنی خط $y = x$) قرار دارد، می‌توانیم آن را به صورت $\omega(\alpha , \alpha)$ در نظر بگیریم.



از طرفی این دایره، محور xها را با طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده است، یعنی دو نقطه‌ی $A(۱ , ۰)$ و $B(۳ , ۰)$ روی این دایره واقع‌اند.

بنابراین $R = A\omega = B\omega$.

$$A\omega = B\omega \Rightarrow \sqrt{(\alpha - ۱)^{۲} + (\alpha - ۰)^{۲}} = \sqrt{(\alpha - ۳)^{۲} + (\alpha - ۰)^{۲}}$$

$$\Rightarrow (\alpha - ۱)^{۲} + \alpha^{۲} = (\alpha - ۳)^{۲} + \alpha^{۲} \Rightarrow (\alpha - ۱)^{۲} = (\alpha - ۳)^{۲}$$

$$\Rightarrow \alpha^{۲} - ۲\alpha + ۱ = \alpha^{۲} - ۶\alpha + ۹ \Rightarrow ۴\alpha = ۸ \Rightarrow \alpha = ۲$$

$$\Rightarrow R = A\omega = \sqrt{(۲ - ۱)^{۲} + ۲^{۲}} = \sqrt{۵}$$